

Barem clasa a X-a

(OLM 2026-etapa locală)

Subiectul 1 (25 puncte)

Cum $z \neq 0$, în ecuația dată, putem înmulți cu z și obținem $z^3 + z^2 + z = 0$. Din ecuația inițială, $z^2 + z = -1$, deci $z^3 - 1 = 0$, de unde $z^3 = 1$(5p)

Avem, deci $z^{2025} = (z^3)^{675} = 1^{675} = 1$, $z^{2026} = z^{2025} \cdot z = 1 \cdot z = z$ și $z^{2027} = z^{2025} \cdot z^2 = z^2$(4p)

Deci, expresia dată se rescrie $z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = z + \frac{1}{z}$(4p)

Împărțind ecuația inițială cu z , obținem $z + 1 + \frac{1}{z} = 0$, adică $z + \frac{1}{z} = -1$(4p)

Ridicând această relație la pătrat, avem $z^2 + 2 \cdot z \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 1 \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = -1$(4p)

Cum $z^3 = 1$, avem $z^3 + \frac{1}{z^3} = 2$. Așadar, $z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = 2 + 3 \cdot (-1) = -1$ și, cum $z + \frac{1}{z} = -1$, relația este demonstrată.....(4p)

Subiectul 2 (25 puncte)

a) $\log_y x^{\log_y z} = (\log_y z)(\log_y x) = (\log_y x)(\log_y z) = \log_y z^{\log_y x}$. Rezultă că $x^{\log_y z} = z^{\log_y x}$(10p)

b) $21^{\log_3 2} = (3 \cdot 7)^{\log_3 2} = 3^{\log_3 2} \cdot 7^{\log_3 2} = 2 \cdot 7^{\log_3 2} = 7^{\log_3 2} + 7^{\log_3 2}$(10p)

Din a) rezultă că $7^{\log_3 2} = 2^{\log_3 7}$, deci $21^{\log_3 2} = 2^{\log_3 7} + 7^{\log_3 2}$(5p)

Subiectul 3 (20 puncte)

a) Prin logaritmare, obținem: $x \cdot \lg x = a \cdot \lg a$(3p)

Din $a > 1$ avem și $x > 1$. Funcțiile $f(x) = x$ și $g(x) = \lg x$ sunt strict crescătoare și pozitive pe $(1, \infty)$, deci și produsul lor este o funcție strict crescătoare pe $(1, \infty)$(3p)

Atunci, din injectivitate, ecuația are soluția unică $x = a$(2p)

b) Ridicând la puterea a treia, ecuația devine: $(x^{x^3})^3 = (6^2)^3 \Leftrightarrow x^{3x^3} = 6^6$(6p)

$\Leftrightarrow (x^3)^{x^3} = 6^6$. Conform punctului a), rezultă $x^3 = 6$, cu soluția $x = \sqrt[3]{6}$(6p)

Subiectul 4 (20 puncte)

Din inegalitatea mediilor avem că $\lg(x+1) \cdot \lg(y+1) \cdot \lg(z+1) \leq \left(\frac{\lg(x+1)+\lg(y+1)+\lg(z+1)}{3}\right)^3$ (3p)

și cum $\left(\frac{\lg(x+1)+\lg(y+1)+\lg(z+1)}{3}\right)^3 = \frac{\lg^3(1+x+y+z+x \cdot y+x \cdot z+y \cdot z+x \cdot y \cdot z)}{27}$ obținem

$$\lg(x+1) \cdot \lg(y+1) \cdot \lg(z+1) \leq \frac{\lg^3(1+x+y+z+x \cdot y+x \cdot z+y \cdot z+x \cdot y \cdot z)}{27}. (*) \text{(3p)}$$

Din inegalitatea mediilor avem

$$(**) \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} \leq \frac{x+y+z}{3} = 3, \forall x, y, z \in (0, +\infty) \Leftrightarrow x \cdot y \cdot z \leq 27, \forall x, y, z \in (0, +\infty) \text{(3p)}$$

și cum

$$x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z \leq x^2 + y^2 + z^2, \forall x, y, z \in (0, +\infty) \Leftrightarrow x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}, \forall x, y, z \in (0, +\infty),$$

$$\text{obținem } x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z \leq 27, \forall x, y, z \in (0, +\infty). (***) \text{(6p)}$$

Revenind la inegalitatea (*) pe baza inegalităților (**) și (***) și a ipotezei $x + y + z = 9$ obținem

$$\lg(x+1) \cdot \lg(y+1) \cdot \lg(z+1) \leq \frac{\lg^3(1+x+y+z+x \cdot y+x \cdot z+y \cdot z+x \cdot y \cdot z)}{27} \leq \frac{\lg^3(1+9+27+27)}{27} = \frac{\lg^3 64}{27}$$

$$\text{adică } \lg(x+1) \cdot \lg(y+1) \cdot \lg(z+1) \leq 8 \cdot \lg^3 2, \text{ cu egalitate pentru } x = y = z = 3 \text{(5p)}$$

Soluție alternativă:

$$\text{Fie } x+1=a, y+1=b, z+1=c, a, b, c \in (1, +\infty) \text{(2p)}$$

Din ipoteza $x + y + z = 9$ rezultă că $a + b + c = 12$ și inegalitatea de demonstrat devine:

$$\lg a \cdot \lg b \cdot \lg c \leq 8 \cdot \lg^3 2 \text{(3p)}$$

Avem $\lg a > 0, \lg b > 0, \lg c > 0$ și din inegalitatea mediilor rezultă că:

$$\lg a \cdot \lg b \cdot \lg c \leq \left(\frac{\lg a + \lg b + \lg c}{3}\right)^3 = \left(\frac{\lg(abc)}{3}\right)^3 \quad (1) \text{(4p)}$$

$$\text{Dar } \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3, \text{ adică } \lg(abc) \leq \lg\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 3 \lg 4 \quad (2) \text{(4p)}$$

$$\text{Din (1) și (2) rezultă că } \lg a \cdot \lg b \cdot \lg c \leq \left(\frac{3 \lg 4}{3}\right)^3 = 8 \cdot \lg^3 2 \text{(4p)}$$

$$\text{Cu egalitate pentru } a = b = c \Leftrightarrow x = y = z = 3 \text{(3p)}$$